RÉPUBLIQUE
FRANÇAISE
Liberté
Égalité
Fraternité

Conseil scientifique de l'éducation nationale

> LE PASSEUR >

Cette lettre a été rédigée par Monica Neagoy, autrice, consultante et formatrice internationale en mathématiques.

ENSEIGNER LES FRACTIONS AVEC SENS… ET PLAISIR !

À la Une ! *L'apprentissage des fractions pose un défi considérable aux élèves. C'est pourquoi, en les découvrant tôt, ils seront plus à même d'apprécier « ces nouveaux nombres » et de s'ouvrir au monde fascinant des mathématiques. Quels sont les obstacles courants à l'apprentissage des fractions et quelles sont les pistes pour y remédier ?*

QU'EST-CE QU'UNE FRACTION, ET POURQUOI LES FRACTIONS SONT-ELLES FONDAMENTALES ?

À l'école primaire, les élèves abordent la fraction comme un nombre qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers positifs {0, 1, 2, 3…}, comme $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{5}$. Zéro en fait partie, car $\frac{0}{b}=0$ pour toute valeur de b, autre que 0. Autrement dit, $\frac{a}{0}$ n'a pas de sens. Au collège, les élèves ajoutent à leur répertoire de nombres les entiers négatifs ; alors, la fraction fera partie des **nombres rationnels,** c'est-à-dire les nombres de la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers relatifs {…–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3…}. La condition $b \neq 0$ tient toujours.

Ces nombres sont importants pour au moins quatre raisons :

- **La maîtrise des fractions est nécessaire dans la vie quotidienne,** par exemple, pour suivre des recettes, calculer des remises, changer de l'argent, convertir des unités de mesure, comparer des taux… et dans le monde du travail, comme la médecine, le sport, le bâtiment, la menuiserie, la santé, et bien plus.
- **Les fractions sont essentielles à la réussite en algèbre.** En Amérique, un rapport d'un panel national de conseil en mathématiques, composé d'experts, a conclu après deux ans que l'algèbre était la clé de la réussite en mathématiques avancées, et que la principale raison de l'échec des élèves dans ce domaine était leur faible maîtrise des fractions. Même dans les pays performants, les fractions s'avèrent être un sujet difficile à apprendre et à enseigner.
- **Les travaux de Gérard Vergnaud montrent qu'elles font partie intégrante d'une série de structures multiplicatives.** À mesure que les élèves étudient ces structures, ils passent

progressivement d'une pensée additive à une pensée multiplicative, condition requise pour le raisonnement proportionnel.

- **Les fractions jouent un rôle clé dans les sentiments des élèves à l'égard des mathématiques.** Pour nombre d'entre eux, les fractions constituent une première difficulté dans leur apprentissage. Lorsqu'ils ou elles doivent renoncer à leur compréhension et se contenter d'apprendre par cœur des règles et des procédures qui semblent dénuées de sens, c'est le début de la fin de leur amour pour les mathématiques !

QUELS SONT LES OBSTACLES DANS L'APPRENTISSAGE DES FRACTIONS ?

Dans nombre de pays, pendant trop longtemps, les écoles ont produit des générations d'élèves pour qui l'apprentissage des fractions consistait en une brève introduction du sens « partie d'un tout », suivie d'années de pratique répétée de calcul de fractions. Or, **bien comprendre les fractions, c'est bien plus que connaître les règles et les algorithmes de calcul.**

Quelques difficultés rencontrées par les élèves :

1. La nature bipartite d'une fraction. Après des années de travail avec les nombres naturels (c'est-à-dire, 0, 1, 2, 3, 4…), les élèves ne peuvent pas comprendre d'emblée une fraction comme un seul nombre, car son écriture symbolique en comprend deux.

2. Le biais de raisonnement sur les nombres entiers. Conséquence du point ci-dessus, un des obstacles majeurs que rencontrent les élèves, souligné dans les travaux de Van Hoof et al., est que le raisonnement sur les nombres entiers ne s'applique pas toujours aux fractions. Deux exemples typiques :

- « $\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$ parce que 4 > 3 » ; or, $\frac{1}{4}$ est inférieur à $\frac{1}{3}$.
- « La multiplication rend plus grand et la division rend plus petit » ; or, la multiplication $10 \times \frac{1}{2}$ donne 5 (un produit inférieur à 10) et la division $3 \div \frac{1}{2}$ donne 6 (un quotient supérieur à 3).

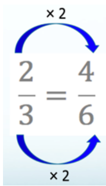
3. Des idées limitées sur la signification des fractions. Nombre d'élèves ne voient les fractions qu'à travers un seul angle : le sens de « partie d'un tout », comme dans « $\frac{3}{4}$ d'un gâteau veut dire 3 parts prises parmi 4 parts égales du gâteau ». Cette conception initiale – et souvent unique – limite leur compréhension des notions à venir.

4. Un répertoire limité de représentations de fractions et un manque de liens établis entre celles-ci. Les représentations visuelles, tactiles et autres, présentées dans un ordre bien pensé, du plus concret au plus abstrait, aident les élèves à construire du sens. Or, quand les représentations sont déficientes ou insuffisantes et le passage à l'abstraction trop rapide, la fraction demeure un symbole dénué de sens qu'on manipule en appliquant des règles qui semblent avoir encore moins de sens.

5. Une mécompréhension de l'unité. Une difficulté majeure rencontrée par les élèves relève de la conception de la notion d'unité (d'abord appelée « le tout » au cycle 2). Or, le concept du tout est à l'origine du concept de fraction. En d'autres termes, une fraction est toujours définie en relation avec un tout, explicite ou implicite. Un quart de 12 élèves et un quart de 20 élèves ne représentent pas le même nombre d'élèves.

6. Une faible compréhension de la grandeur d'une fraction et, par conséquent, une difficulté à comparer deux fractions sans l'aide d'une règle à appliquer. Ceci est en partie dû au fait que l'enseignement ne souligne pas suffisamment la représentation spatiale des nombres : d'abord la représentation des nombres entiers sur la bande numérique et ensuite la représentation des fractions sur la droite numérique. Un exemple de raisonnement souhaitable, mais rare : « $\frac{7}{8}$ est supérieur à $\frac{5}{6}$ car le premier est à $\frac{1}{8}$ de 1 (sur la droite numérique) alors que le deuxième est à $\frac{1}{6}$ de 1, et je sais que $\frac{1}{8} < \frac{1}{6}$. »

7. Une compréhension superficielle de l'équivalence entre deux fractions. On introduit l'algorithme d'équivalence trop tôt et on le symbolise par deux flèches entre les fractions *(voir figure)*. Les élèves n'apprécient pas que multiplier numérateur et dénominateur d'une fraction par un même nombre revient à le multiplier par 1, or multiplier un nombre par 1 ne change pas sa valeur.

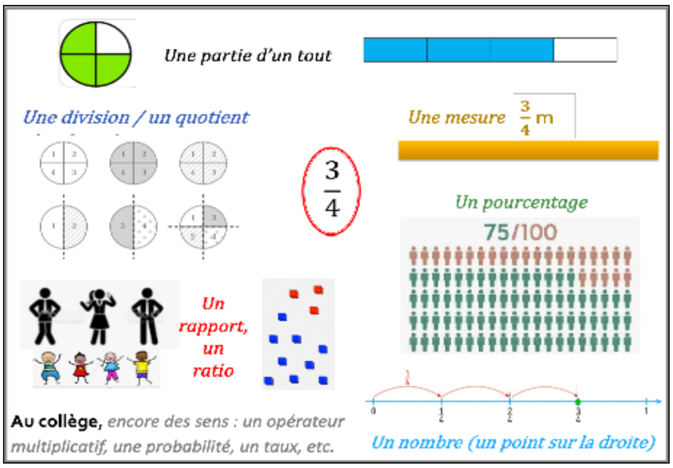


8. Un manque de compréhension des algorithmes de calcul. Ceci est dû en partie à l'approche procédurale de l'enseignement des fractions. La connaissance procédurale est importante, certes, mais lorsqu'elle ne s'accompagne pas d'une connaissance conceptuelle, elle n'incite les élèves ni à comprendre ni à apprécier les mathématiques. Exemple : les élèves ne comprennent pas pourquoi, lorsqu'on multiplie deux fractions, on multiplie numérateurs entre eux et dénominateurs entre eux alors que, pour la division de deux fractions, on inverse la deuxième, et puis on les multiplie.

QUELLES PISTES POUR Y REMÉDIER ?

Le but ultime de l'enseignement des fractions est d'aider les élèves à comprendre les fractions comme des nombres à part entière et comme des objets pouvant être manipulés par l'arithmétique. Mais atteindre cet objectif n'est pas tâche facile. Il est important de souligner que la notion de « fraction comme nombre » se construit progressivement, sur un temps long. Les deux années supplémentaires au cycle 2 permettront aux enseignants de prendre le temps de cultiver la compréhension conceptuelle des fractions. Voici quelques conseils pédagogiques :

1. Explorer les sens et représentations multiples d'une fraction. Les fractions ont de nombreux visages (appelés *« subconstructs »* par Thomas Kieren), mais les élèves n'ont souvent qu'une idée limitée de leur sens. C'est le résultat direct des expériences limitées qu'ils ont au primaire. Avant le collège, les élèves devraient faire l'expérience d'une fraction comme **partie-tout, mesure, division/quotient,** et même des exemples simples de **rapport/taux.** Ils font déjà l'expérience d'une fraction comme **opérateur** dans des situations de résolution de problèmes, telles que : *« Idris a des ballons. $\frac{1}{3}$ des ballons est bleu, $\frac{1}{2}$ est rouge et le reste est jaune. Il a 7 ballons jaunes. Combien de ballons Idriss a-t-il en tout ?* » Chacune de ces notions de fraction doit être explorée dans un large éventail de représentations.



Prenons la notion la plus concrète qui découle du quotidien de l'enfant, celle de **partie-tout.**

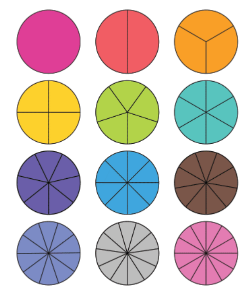
Au début, les élèves partagent 1, 3 ou 5 cookies entre deux personnes et passent progressivement à des situations plus complexes. Considérez des quantités continues au début, puis des quantités discrètes par la suite : il est plus difficile pour un enfant de trouver $\frac{1}{4}$ de 20 élèves que $\frac{1}{4}$ d'une tarte. Soyez attentifs aux questions que vous posez. Supposons que 2 œufs d'un carton de 6 sont cassés. Se concentrer sur le nombre d'œufs qui ne sont pas cassés relève d'un raisonnement additif : $\frac{2}{6}$ (œufs cassés) + $\frac{4}{6}$ (œufs entiers) composent le carton entier de 6 œufs, ou le tout ($\frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{6}{6} = 1$). En revanche, se concentrer sur la partie de la boîte qui est cassée en relation avec le tout relève de la pensée multiplicative : 2 (œufs cassés) représente $\frac{1}{3}$ de la boîte de 6 œufs ($2 = \frac{1}{3} \times 6$).

<u>Remarque</u> :
Des chercheurs, tels que Confrey, ont cartographié sept domaines de concepts liés aux nombres rationnels dans leurs trajectoires d'apprentissage qui se développent de la maternelle au CM2. Ils ont souligné l'importance de l'équipartition comme point de départ, construction ancrée dans la génération de parts égales (ex. : partition d'une tarte) ou de groupes égaux (ex. : partition d'une classe d'élèves). Les stratégies de partitionnement acquises permettront aux élèves de partitionner les segments unitaires sur la droite numérique (au CE2 et au-delà) et de placer les fractions (et plus tard les nombres décimaux) sur la droite numérique, fournissant ainsi une base solide pour travailler la grandeur relative de différents nombres, un antidote efficace à de nombreuses idées fausses qui affectent l'enseignement et l'apprentissage des fractions et des décimaux.

2. Insister sur l'importance de l'unité.

Comprendre que la grandeur d'un nombre en écriture fractionnaire est relative à la taille de l'unité est une clé pour comprendre les nombres rationnels, selon Barnett-Clarke et al.

Que faire au cycle 2 pour y remédier ?



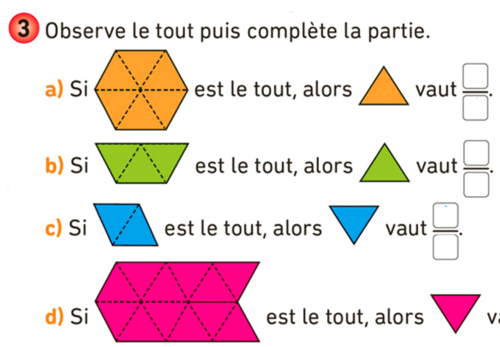
Disques-fractions utilisés au cycle 2

Voici un type d'exercice de sensibilisation qui peut être proposé régulièrement. Brandissez une pièce en forme de demi-disque (l'une des pièces rouges sur la figure des disques-fractions) et posez la question :
« Quelle fraction cela représente-t-il ? » La plupart des enfants (et des adultes !) répondront à l'unisson : « un demi ». Or, dans votre question, vous n'avez pas identifié le tout ou l'unité. Au lieu de répondre « c'est faux », posez une autre question : « Vous ai-je précisé quel est le tout ? » Poursuivez avec :

- si l'unité est 1 disque entier, effectivement la réponse est $\frac{1}{2}$;
- mais si l'unité est 3 disques (3 disques fuchsia ci-contre, représentant par exemple un paquet de 3 cookies), la réponse est alors $\frac{1}{6}$;
- et si l'unité est un quart de disque (l'une des pièces jaunes dans la figure), alors la réponse est 2.

Etc.

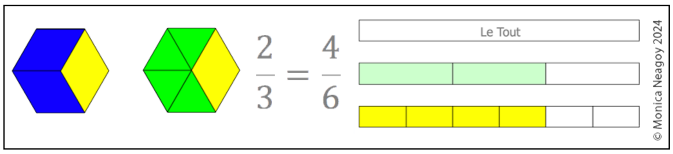
Ce genre d'exercice, dans des formes et contextes multiples, est à explorer au cycle 2. Sensibiliser les enfants au fait qu'une fraction est une relation entre une partie et un tout est essentiel. L'exercice suivant montre qu'une pièce mosaïque de même taille peut représenter toutes sortes de fractions, dépendant du choix de l'unité :



Source : Maths : La méthode de Singapour, CE1, Fichier 2 Neagoy, M. et al. (La librairie des écoles, Paris, 2025)

3. Travailler la notion d'équivalence à l'aide de représentations concrètes.

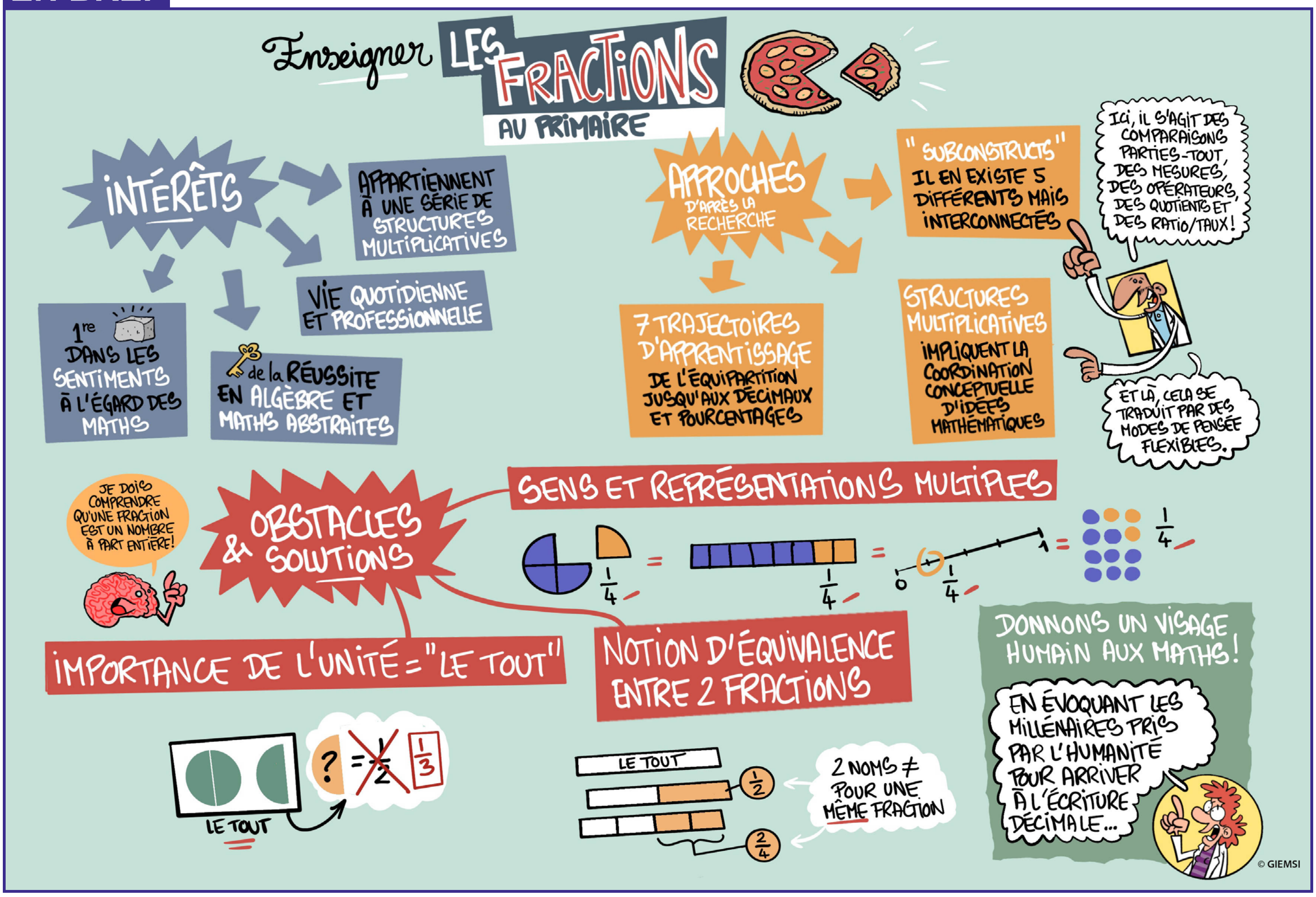
Quel travail proposer pour que les élèves développent des images mentales de l'équivalence entre 2 fractions ? Avec des exemples concrets issus du quotidien de la classe ou à l'aide de matériel pédagogique, il est important de leur faire comprendre que, par exemple, $\frac{2}{3}$ est équivalent à $\frac{4}{6}$ parce que le nombre de parts a doublé et donc que la taille des parts a été divisée par deux de façon à préserver la même quantité. L'expression « fraction équivalente » n'a pas trop de sens pour un jeune enfant. Dites plutôt « $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ sont deux noms différents pour la même fraction ».



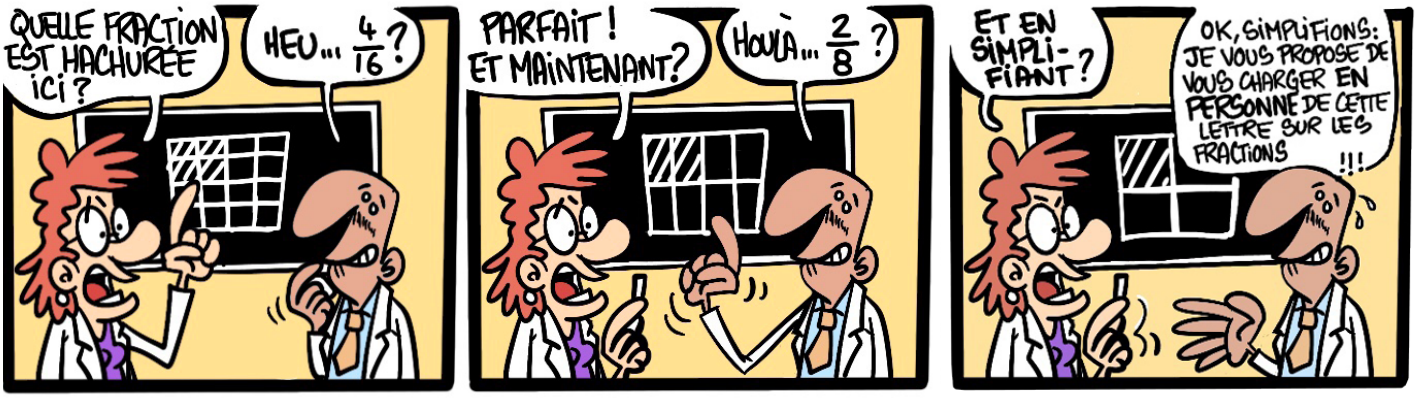
De même, avec des contextes et du matériel variés, faites découvrir aux élèves les différents noms du tout, de l'unité : 2 demis font 1 tout ; 3 tiers font 1 tout ; 4 quarts font 1 tout, etc. Plus tard, l'écriture symbolique pour les fractions équivalentes à 1 sera :
$\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = 1.$

4. Ancrer les fractions dans leur histoire. Enfin, comme pour tout sujet mathématique, l'introduction des fractions est renforcée par le partage d'un peu d'histoire. D'une part, cela confère aux mathématiques un visage humain en dissipant l'hypothèse selon laquelle les mathématiques ont été transmises à l'humanité, telles quelles. Expliquez comment et pourquoi elles ont vu le jour et décrivez les apports des différents pays qui ont contribué à leur long développement. Ainsi, les Égyptiens utilisaient déjà les fractions unitaires, c'est-à-dire les fractions de la forme $\frac{1}{n}$, mais avec une autre notation ! En revanche, le fait que les mathématiciens et mathématiciennes ont mis plus de quatre millénaires à concevoir la notation décimale à virgule nous rappelle que la transition des fractions à la notation décimale à virgule est fort complexe. Faisons preuve de plus d'empathie envers les élèves qui rencontrent des difficultés avec ces écritures symboliques !

EN BREF



LE MOT DE LA FIN



POUR ALLER + LOIN

Les publications du CSEN

- **Une inquiétante mécompréhension des nombres et surtout des fractions à l'entrée en sixième.** Note d'alerte n° 2 (sept. 2023).
- **De la multiplication aux fractions : réconcilier intuition et sens mathématique** (chapitre sur les fractions p. 38-44). Synthèse de la recherche et recommandations (juin 2022).

Et aussi (en anglais) :

- Neagoy, M. (2017). *Unpacking Fractions: Classroom-Tested Strategies to Build Students' Mathematical Understanding*. (Arlington, VA: Association for Supervision & Curriculum Development).
- Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G., & Myers, M. (2009). *Equipartitioning splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories.* In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of The International Group For The Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 345–352). Thessaloniki, Greece: International Group For The Psychology Of Mathematics Education.
- Vergnaud, G. (1988). *Multiplicative structures*. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades*, (141-161). Hillsdale, NJ: Erlbaum and Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

>> Pour retrouver les précédentes lettres :
reseau-canope.fr/conseil-scientifique-de-leducation-nationale-site-officiel/outils-pedagogiques/lettre-le-passeur